גלים ואופטיקה

פרק 7 - חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה)

תוכן העניינים

1. גלים דועכים ותדירויות סף 1
2. יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה 2
3. מקרים מיוחדים 4
4. תרגילים נוספים 6
5. התרחבות בזמן של פולס 8

גלים דועכים ותדירויות סף

רקע

במקרים מסוימים יחס הנפיצה יכול לייצר מספר גל מורכב עבור תדירויות מסוימות. במקרים אלו נקבל גל דועך בתווך. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.

שאלות

1) גל דועך בפלסמה

גלים אלקרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא: $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים, מעוררים גל בתדירות: $\omega_0=\frac{1}{2}\omega_p$.

רשמו ביטוי לפונקציית הגל, מהו קבוע הדעיכה?

תשובות סופיות

1) $\psi(x,t)=Ae^{-\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}x}e^{-i\frac{1}{2}\omega_p t}$, קבוע הדעיכה הוא: $\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}$.

יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה

רקע

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה: $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dx$

כאשר: $A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx$

מהירות הפאזה: $v_\varphi(k)=\frac{\omega}{k}$

מהירות החבורה: $v_g(k)=\frac{\partial\omega}{\partial k}$

שאלות

1) מיתר מתכתי

יחס הנפיצה שמתאר תנודות של מיתר מתכתי ממשי הקשור בשני קצוותיו נתון ע"י: $\omega^2=\left(\frac{T}{\rho}\right)k^2\left(1+\varepsilon L^2k^2\right)$

כאשר T המתיחות, ρ צפיפות המסה ליחידת אורך, $\varepsilon<<1$ פרמטר חסר יחידות המייצג את קשיחות המיתר ו- L אורך המיתר.

א. חשבו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה.

ב. הסבירו מדוע מספרי הגל ואורכי הגל זהים לאלו המתקבלים אם המיתר היה אידיאלי.

ג. רשמו את התדירויות העצמיות כתלות ב- n ושאר הנתונים בבעיה.

ד. הראו שבגבול $n\to\infty$ התדירויות פרופורציוניות ל- n^2 והשוו למיתר אידיאלי.

ה. נגדיר את התחום האידיאלי של מיתר על פי $\varepsilon L^2k^2<<1$.
כמה אופני תנודה נמצאים בתחום האידיאלי במיתר שבו $L=1.2m$ ו- $\varepsilon=2\cdot10^{-5}$.

2) הוכחת נוסחה נוספת למהירות החבורה

הראו שניתן לרשום את מהירות החבורה בתור: $v_g(k)=k\frac{\partial v_\varphi}{\partial k}+v_\varphi$.

3) חילוץ משוואה מתוך יחס נפיצה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא:

$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

א. רשמו את משוואת הגלים המתאימה ליחס הדיספרסיה הנ"ל.

ב. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה ובדקו מה קורה בגבול של: $ck>>\omega_p$.

תשובות סופיות

1) א. $v_\varphi=\sqrt{\left(\frac{T}{\rho}\right)\left(1+\varepsilon L^2k^2\right)}$, $v_g=\frac{1}{2\omega}\left(\frac{T}{\rho}\left(2k+4\varepsilon L^2k^3\right)\right)$

ב. מספרי הגל ואורכי הגל מגיעים מתנאי השפה ואינם מושפעים מיחס הנפיצה.

ג. $f_n=\frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{T}{\rho}\right)\frac{\pi^2n^2}{L^2}\left(1+\varepsilon\pi^2n^2\right)\right)\frac{1}{2}$

ד. הוכחה בסרטון.

ה. $n\approx 7$

2) הוכחה בסרטון.

3) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega_\rho^2\psi+c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

ב. $v_\varphi=\sqrt{\frac{\omega_\rho^2}{k^2}+c^2}$, $v_g=\frac{c^2k}{\omega}$, בגבול $ch>>\omega_\rho$ $\quad v_g\chi v_\rho\chi c$

מקרים מיוחדים

רקע

מכניקת הקוונטים:

פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

משוואת שרדינגר: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{2x^2}$

התנע של חלקיק: $\rho=\hbar k$

גלי מים:
יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל

$$\omega^2=\left[gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tan h(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח

H - עומק הנוזל

g - תאוצת הכובד

ρ - צפיפות המסה ליחידת נפח

עבור גלים קצרים (גלי מתח פנים): $\lambda \ll \lambda_c \sim 2cm$

$$\omega=\sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל): $H>>\lambda>>\lambda_c$.

$$\omega=\sqrt{gk}$$

עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל): $\lambda>>H>>\lambda_c$.

$$\omega=\sqrt{gH}k$$

שאלות

1) קירובים במים עמוקים

יחס הנפיצה של גלים על השפה של נוזל לא צמיג נתון בקירוב ע"י: $\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tanh(kH)$ כאשר g היא תאוצת הכובד, H גובה הנוזל, σ מתח הפנים ו- ρ צפיפות הנוזל.

במקרים בהם המים עמוקים ביחס לאורך הגל אז: $\tanh(kH) \approx 1$ ויחס הנפיצה ניתן בקירוב ע"י: $\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3$.

א. הראו באופן כללי שבנקודת הקיצון של מהירות הפאזה מתקבל שמהירות החבורה שווה למהירות הפאזה.

ב. מהו אורך הגל λ_c במקרה הנתון שבו מהירות הפאזה שווה למהירות החבורה? ומהן המהירויות באורך גל זה?

ג. הראו כי עבור גלי כבידה שבהן $\lambda >> \lambda_c$ מתקבל: $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$.

ד. הראו כי עבור גלי מתח פנים שבהם $\lambda << \lambda_c$ מתקבל: $v_g = \frac{3}{2}v_\varphi$.

2) צונמי ליד טונגה

בינואר 2022 התפוצץ הר געש תת ימי כ-65 ק"מ מאיי טונגה שבאוקיינוס השקט. קוטר הר הגעש הוא כ-10 ק"מ והוא יצר גל באורך של כ-20 ק"מ. כמה זמן ייקח לגל להגיע לאיים? וכמה זמן ייקח לגל להגיע לחופי קליפורניה שנמצאים בערך 8,500 ק"מ מנקודת היווצרות הגל?
הניחו כי עומק האוקיינוס הוא כ-4 ק"מ.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון. ב. $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$, $v_g(\lambda_c) = \sqrt{2}\left(\frac{g\sigma}{\rho}\right)$

ג. הוכחה בסרטון. ד. הוכחה בסרטון.

2) כ-70 שניות לטונגה וכ-26 שעות לקליפורניה.

תרגילים נוספים

שאלות

1) גלי רוחב בשרשרת מסות בדידה

נתונה מערכת של שרשרת מסות זהות m המחוברות בקפיצים זהים בעלי קבוע k_0. המסות נמצאות במרחקים זהים אחת מהשנייה ומרחקים אלו גדולים בהרבה מהאורך הרפוי של הקפיץ ומתנודות המסות.

מצאו את משוואת הגלים עבור גלי רוחב, כלומר תנודות המסות הן בכיוון מאונך לקפיצים, ומצאו את יחס הדיספרסיה.

2) מודל לגביש עם שכנים רחוקים

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה m.

בשיווי משקל המרחק בין זוג אטומים הוא l.

נתון שכל אטום מחובר לשני שכניו הקרובים ביותר באמצעות קפיצים זהים בעלי קבוע קפיץ k_0 ולשני שכניו הבאים בתור באמצעות קפיצים בעלי קבוע קפיץ k_1.

א. מצאו את יחס הנפיצה של תווך זה.

ב. מהי מהירות החבורה כתלות ב- k (מספר הגל)?

3) החזרה והעברה בתווך עם נפיצה

מיתר בעל יחס נפיצה: $\omega = ck$ משתרע מ- $x=-\infty$ עד $x=0$.

ב- $x=0$ המיתר מחובר למיתר אחר המשתרע עד $x=\infty$ ובו מתקיימת

משוואת הגלים הבאה: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0$

(זוהי משוואת קליין גורדון לחלקיק קוונטי יחסותי).

א. מצאו את יחס הנפיצה במיתר הימני.

ב. גל הרמוני בתדירות ω ואמפליטודה A מתקדם מ- $-\infty$ למיתר הימני.
מצאו את הביטויים עבור הגל המוחזר ועבור הגל העובר במקרים הבאים:

i. $\omega > \frac{mc^2}{\hbar}$

ii. $\omega < \frac{mc^2}{\hbar}$

ג. חשבו את מקדמי ההחזרה וההעברה של ההספק: $R_p=\left\langle \frac{P_r}{P_i}\right\rangle$

ו- $T_p=\left\langle \frac{P_t}{P_i}\right\rangle$ בשני המקרים שבסעיף הקודם.

רמז: העזרו בשימור אנרגיה.

תשובות סופיות

1) $$k\left(4_{n+1}-24_n+4_{n-1}\right)=m\ddot{\psi}_n \quad , \quad \omega(k)=2\omega_0\sin\left(\frac{kl}{2}\right)$$

2) א. $$\omega^2(k)=4\omega_1^2\sin^2(kl)+4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{kl}{2}\right) \quad , \quad \omega_1^2=\frac{k_1}{m} \quad , \quad \omega_0^2=\frac{k_0}{m}$$

ב. $$\frac{1}{\omega}\left(2\omega_1^2 l\cdot\sin(2kl)+\omega_0^2 l\sin(kl)\right)$$

3) א. $$\omega_s^2=\frac{m^2c^4}{\hbar^2} \quad , \quad \omega^2=c^2k^2+\omega_s^2$$

ב. i. $$\psi_r(x,t)=\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad , \quad \psi_t(x,t)=\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}Ae^{-i\left(\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_s^2}}{c}x-\omega t\right)}$$

ii. $$\psi_r(x,t)=\frac{1-i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}{1+i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad , \quad \psi_t(x,t)=\frac{2A}{1+i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}e^{-\frac{\sqrt{\omega_s^2-\omega^2}}{c}x}e^{-i\omega t}$$

ג. i. $$R_p=\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}\right)^2 \quad , \quad T_p=1-\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}\right)^2$$

ii. $$R_p=1 \quad , \quad T_p=0$$

התרחבות בזמן של פולס

רקע

הרוחב כתלות בזמן של פונקציית גאוסיאן: $\sigma^2(t)=\frac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$,

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו- $\beta=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\Big|_{k_0}$.

שאלות

1) פולס בסיבים אופטיים

נתבונן על הדיספרסיה בסיבים אופטיים. משדרים פולס גאוסיאני בעל אורך זמני τ_0 לסיב באורך l.

מהירות החבורה בסיב היא: $v_g(k)$.

א. ההרחבה הזמנית של הפולס מוגדרת לפי: $\Delta\tau=\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}$.
מצאו נוסחה להרחבה הזמנית כתלות בפרמטרים: l, v_g, τ_0 ו- β השווה ל- $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$.

הדרכה: השתמשו בנוסחה של ההרחבה המרחבית: $\sigma^2(t)=\frac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$
ועברו לרוחב הזמני על ידי חלוקה במהירות החבורה.

ב. נתון שמהירות הפאזה עבור סיב ספציפי סביב אורך גל $\lambda_0=1.55\mu m$:
היא: $v_\varphi(k)\approx\frac{c}{n}\left(1+\frac{k}{q}\right)$ כאשר c היא מהירות האור, n הוא מקדם השבירה של הסיב ו- q פרמטר נוסף.
מהו משך רוחב הפולס שניתן לשדר כך שההרחבה שלו תהיה בגודל הרוחב המקורי, כלומר: $\Delta\tau=\tau_0$

ג. חשבו את $\Delta\tau$ כאשר:
$n=1.47$, $q=4.35\cdot10^9\cdot\frac{1}{m}$, $\lambda_0=1.55\mu m$, $l=75km$ $c=3\cdot10^8\frac{m}{\sec}$.
מהי המגבלה על קצב השידור המירבי אם הדיספרסיה היא הגורם המגביל?

2) יחס מדומה בגאוסיאן

בתווך כלשהו מתקיים יחס הנפיצה הבא: $\omega(k)=\alpha k-i\beta k^2$ כאשר α ו- β קבועים חיוביים נתונים.

א. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה כתלות ב- k.

ב. רשמו ביטוי אינטגרלי כללי ל- $\psi(x,t)$ עבור פולס שנע בכיוון החיובי בהינתן: $\psi(x,0)=f(x)$.

ג. מצאו את: $\psi(x,t)$ עבור פונקציית גאוסיאן: $\psi(x,0)=Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$.

ד. מהו רוחבו ומרכזו של הגאוסיאן כתלות בזמן?

3) רוחב חבילה לאחר מרחק 3 סיגמה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא: $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

מעוררים בפלסמה חבילת גלים גאוסיאנית ברוחב σ ותדירות מרכזית $\omega_0>\omega_p$.

מצאו את רוחב החבילה לאחר שהתקדמה מרחק 3σ.

תשובות סופיות

1) א. $\Delta\tau=\frac{2\beta l}{\tau_0 v_g^3}$ ב. $\tau_0=\sqrt{\frac{2n^2 l}{c^2 q\left(1+\frac{4\pi}{q\lambda_0}\right)^3}}$ ג. $2.87\cdot 10^{11}\sec$

2) א. $v_g(k)=\alpha-2i\beta k$, $v_\varphi(k)=\alpha-i\beta k$

ב. $F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$, $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{i\left(kx-\left(\alpha k-i\beta k^2\right)t\right)}dk$

ג. $\psi(x,t)=\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+2\beta t}}Ae^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\alpha t)^2}{\sigma^2+2\beta t}}$

ד. $\mu=\alpha t$, $\sigma=\sqrt{\sigma^2+2\beta t}$

3) $\frac{qc^2\omega_p^4}{\omega_0^4\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)}+\sigma^2$